"CALCOLO LETTERALE"

Definizione: Data una formula si dicono ***variabili*** le lettere alle quali può essere sostituito qualsiasi valore numerico; i numeri si dicono, invece, ***costanti***.

Esempio:

Nella formula per il calcolo della lunghezza della circonferenza $C = 2\pi \cdot r$ le costanti sono i numeri 2 e π, r è detta ***variabile indipendente*** perché può assumere un valore numerico mentre C è una ***variabile dipendente*** perché il suo valore numerico dipende da quello assunto da R.

MONOMI

Definizione: Dicesi ***monomio*** un'espressione che possa essere rappresentata come moltiplicazione tra numeri e lettere. Ogni monomio è costituito da un ***coefficiente numerico*** e da una ***parte letterale***.

Esempio:

Nel monomio $-5x^2y$ il numero -5 rappresenta il coefficiente numerico, mentre x^2y è la parte letterale.

Definizione: Due monomi si dicono ***simili*** se hanno la stessa parte letterale.

Esempio:

I monomi $-5x^2y$ e $\frac{1}{2}x^2y$ sono simili.

Definizione: Si dice ***grado*** di un monomio la somma degli esponenti di tutte le variabili che compaiono nella parte letterale.

Esempio:

Il grado del monomio $-5x^2y$ è 3.

ATTENZIONE!!! Non sono monomi le espressioni:	**IN QUANTO…**
$\sqrt{ab^2}$, $3cb^{\frac{2}{3}}$, …..	I monomi si costruiscono con un numero finito di moltiplicazioni: *gli esponenti della parte letterale di un monomio sono numeri naturali*
$\frac{2a^2b}{b^2}$, $3cb^{-3}$, …..	Come sopra. Infatti l'esponente è negativo (non è un numero naturale) ***Oss:*** Ciò implica che *nell'insieme dei monomi* ***non*** *è definita la divisione.*
$2a^2b + 3ab^2$, …..	Perché le parti letterali non sono identiche, quando lo sono si dice, appunto, che i **monomi** sono **simili** e la loro somma (somma dei coefficienti) è un monomio. ***Es***: $2a^2b + 3a^2b = 5a^2b$ è ancora un monomio.

Erasmo Modica, 2006/2007
www.galois.it

Definizione: Due monomi si dicono ***opposti*** se hanno le parti letterali uguali e i coefficienti numerici opposti.

Esempio:

I monomi $-5x^2y$ e $5x^2y$ sono opposti.

OPERAZIONI CON I MONOMI

SOMMA DI MONOMI

Definizione: La ***somma*** di due monomi simili è un monomio simile a quelli dati che ha per coefficiente numerico la somma algebrica dei coefficienti numerici e per parte letterale la parte letterale degli addendi.

La somma tra monomi gode delle proprietà:

- commutativa;
- associativa;
- 0 è l'elemento neutro rispetto alla somma;
- ogni monomio ammette opposto.

Esempio:

Il monomio somma dei monomi $\frac{1}{2}x^2z$ e $-\frac{1}{3}x^2z$ è il monomio $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^2z = \frac{1}{6}x^2z$.

PRODOTTO DI MONOMI

A differenza della somma, è sempre possibile moltiplicare due monomi.

Definizione: Il ***prodotto*** di due monomi è un monomio che ha per coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti numerici e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.

Esempio:

Il monomio prodotto dei monomi $\frac{5}{2}x^2z$ e $-\frac{2}{3}x^2z^2y$ è il monomio $-\frac{5}{3}x^4z^3y$.

La moltiplicazione tra monomi gode delle proprietà:

- commutativa;
- associativa;
- 1 è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

"Perché nell'insieme dei monomi non è possibile definire una divisione?"

Per rispondere alla precedente domanda basta osservare che, quando trattiamo con i numeri reali, definiamo la divisione tra due numeri a e b (con $b \neq 0$), come il prodotto del primo per l'inverso del secondo, cioè:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}$$

L'inverso di un monomio non sempre è un monomio, in quanto si possono presentare, nella parte letterale, dei termini ad esponente negativo.

POTENZA DI MONOMI

Nell'insieme dei monomi è possibile effettuare l'elevazione a potenza con esponente naturale.

Definizione: La ***potenza***, con esponente naturale, di un monomio è un monomio che ha come coefficiente numerico la potenza del coefficiente numerico e come parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempio:

La terza potenza del monomio $\frac{3}{2}x^3y^2z^2$ è il monomio $\left(\frac{3}{2}x^3y^2z^2\right)^3 = \frac{27}{8}x^9y^6z^6$.

M.C.D. E m.c.m. DI MONOMI

Nell'insieme dei monomi è possibile definire il concetto di multiplo.

Definizione: Dati due monomi A e B diremo che A è ***multiplo*** di B se esiste un monomio C tale che $A = B \cdot C$. Il monomio B prende il nome di ***divisore*** di A.

Osservazione: Per stabilire se il monomio A è multiplo del monomio B basta stabilire se il coefficiente numerico di A è multiplo di quello di B e se gli esponenti delle lettere che compaiono nella parte letterale di A sono maggiori o uguali a quelli delle corrispondenti lettere che compaiono nella parte letterale del monomio B.

Definizione: Il ***massimo comun divisore*** (***M.C.D.***) di due o più monomi è il massimo tra tutti i divisori comuni dei monomi considerati e si ottiene moltiplicando tra loro i fattori comuni a tutti i monomi, ciascuno preso una sola volta, col minore esponente.

Esempio:

Determinare il M.C.D. dei monomi $12x^2yz^2t$; $4x^3y^2z$; $2xy^4z^3t^2$.

Il massimo comun divisore dei coefficienti numerici è 2, mentre la parte letterale del monomio cercato è xyz.

Definizione: Due monomi sono ***primi tra loro*** se il loro massimo comun divisore è 1.

Esempio:

I monomi $7x^3y$ e $5zt^2$ sono primi tra loro.

Osservazione: Due monomi primi tra loro sono tali che i loro coefficienti numerici siano primi tra loro e non abbiano alcuna lettera in comune.

Definizione: Il ***minimo comune multiplo*** (**m.c.m.**) di due o più monomi è il minimo tra tutti i multipli comuni dei monomi considerati e si ottiene moltiplicando tra loro i fattori comuni e non comuni a tutti i monomi, ciascuno preso una sola volta, col maggiore esponente.

Esempio:

Determinare il m.c.m. dei monomi $12x^2yz^2t$; $4x^3y^2z$; $2xy^4z^3t^2$.

Il minimo comune multiplo dei coefficienti numerici è 12, mentre la parte letterale del monomio cercato è $x^3y^4z^3t^2$.

POLINOMI

Definizione: Dicesi ***polinomio*** un'espressione algebrica formata dalla somma algebrica di due o più monomi, detti *termini* del polinomio.

Esempi:

Le espressioni

$$2\sqrt{3}ab^2 - \frac{5}{7}b^2c + e^{-1}ab \qquad \text{e} \qquad -\sqrt{\pi}a^2 + \frac{3}{e}b^2$$

sono tutti polinomi (ricorda che le lettere e e π indicano dei numeri irrazionali e quindi sono costanti e non variabili).

Definizione: Dicesi ***grado di un polinomio*** il massimo tra i gradi dei singoli monomi che lo compongono.

Esempio:

Il polinomio $\frac{1}{2}x^2z^3 + 5xz^2 + \frac{3}{4}xt$ ha grado 5.

Definizione: Un polinomio si dice ***omogeneo*** se tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado.

Esempio:

Il polinomio $\frac{1}{2}x^2z^3 + 5x^3z^2 + \frac{3}{4}xt^4$ è omogeneo di grado 5.

Principio d'identità dei polinomi: *Dati due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ essi sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei termini simili*.

Le operazioni possibili nell'insieme dei polinomi sono:

- l'addizione,
- la sottrazione,
- la moltiplicazione,
- l'elevazione a potenza con esponente naturale.

OPERAZIONI CON I POLINOMI

SOMMA DI POLINOMI

Definizione: La ***somma*** di due polinomi è il polinomio che si ottiene scrivendo, dopo i termini del primo polinomio, i termini del secondo, ciascuno con il proprio segno.

Esempio: Sommare i polinomi $p(x)=2x^3+4x^2-3$ e $q(x)=-\frac{1}{2}x^3+x^2-4$.

Il polinomio somma è dato da:

$$p(x)+q(x)=2x^3+4x^2-3-\frac{1}{2}x^3+x^2-4$$

La somma tra polinomi gode delle proprietà:

- commutativa;
- associativa;
- 0 è l'elemento neutro rispetto alla somma;
- ogni polinomio ammette opposto.

PRODOTTO DI UN MONOMIO PER UN POLINOMIO

Definizione: Il ***prodotto di un monomio per un polinomio*** è il polinomio che si ottiene moltiplicando tutti i termini del polinomio per il monomio.

Esempio:

Il prodotto del monomio $\frac{5}{2}x^2z$ per il polinomio $-\frac{2}{3}x^2z^2y-\frac{5}{3}x^4z^3y$ è dato da:

$$\frac{5}{2}x^2z\cdot\left(-\frac{2}{3}x^2z^2y-\frac{5}{3}x^4z^3y\right)=-\frac{5}{3}x^4z^3y-\frac{25}{6}x^6z^4y$$

PRODOTTO DI DUE POLINOMI

<u>Definizione</u>: Il ***prodotto di due polinomi*** è il polinomio che si ottiene moltiplicando tutti i termini del primo polinomio per ogni termine del secondo.

Esempio:

Il prodotto del polinomio $\frac{5}{2}x^2z+\frac{1}{2}x$ per il polinomio $-\frac{2}{3}x^2z^2y-\frac{5}{3}x^4z^3y$ è dato da:

$$\left(\frac{5}{2}x^2z+\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}x^2z^2y-\frac{5}{3}x^4z^3y\right)=-\frac{5}{3}x^4z^3y-\frac{25}{6}x^6z^4y-\frac{1}{3}x^3z^2y-\frac{5}{6}x^5z^3y$$