POLINOMI

L'INSIEME dei MONOMI E' CHIUSO RISPETTO ALL'ADDIZIONE?

NO, Es. $x^2 + xy$ e' SOMMA DEI MONOMI x^2, xy

A ESPRESSIONI di QUESTO TIPO SI DA IL NOME DI POLINOMIO

Def: SI CHIAMA <u>POLINOMIO</u> OGNI ESPRESSIONE ALGEBRICA CHE PUO' ESSERE SCRITTA COME SOMMA ALGEBRICA di MONOMI

Per DEFINIZIONE OGNI MONOMIO PUO' ESSERE SCRITTO COME SOMMA DI 2 MONOMI

$$2x^2 = \underbrace{2x^2}_{\text{MONOMIO}} + \underbrace{0}_{\text{MONOMIO NULLO}}$$

$\Rightarrow$ OGNI MONOMIO E' UN POLINOMIO.

"0" e' CONSIDERATO POLINOMIO NULLO

COME PER I MONOMI, SI POSSONO RIDURRE IN <u>FORMA NORMALE</u> (polinomio RIDOTTO)

Es. $x^2 + y^2 + x^2 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{COEFFICIENTE}}}{2}x^2 + y^2$

I COEFFICIENTI CHE TRATTIAMO qui $\in \mathbb{Q}$

Def: GRADO di UN POLINOMIO : Se ridotto in forma normale, si dice

i) GRADO del POLINOMIO RISPETTO a UNA LETTERA
il massimo esponente con cui la lettera compare nel polinomio

ii) GRADO COMPLESSIVO (o grado) del polinomio il maggiore fra i gradi dei suoi termini

oss: - il polinomio nullo non ha grado
- ogni numero $\neq 0$ può considerarsi un polinomio di grado zero

Es. $a + b^2 + a^2 b^3 + a b^2$

	a	b^2	$a^2 b^3$	$a b^2$
GRADO	1	2	5	3

Grado polinomio è 5 perché è il grado del maggiore dei suoi termini

Def: $4x^5 + \underbrace{7}$

TERMINE NOTO del polinomio
il suo grado è 0

Def.

NOME	NR. TERMINI	ESEMPIO
MONOMIO	1 TERMINE	1, $3x$
BINOMIO	2 TERMINI	x^2+y^3
TRINOMIO	3 "	$x^2+2xy+y^2$
QUADRINOMIO	4 "	x^3+x^2+x+1

I nomi si riferiscono a polinomi ridotti in forma normale.

Def POLINOMIO OMOGENEO se tutti i termini che vi compaiono hanno lo stesso grado

Es. $2x^3+xy^2+z^3$ omogeneo

$x^3+yx^2+y^3+5$ NON omogeneo

perché il termine $+5$ ha grado 0

Def: UN POLINOMIO IN FORMA NORMALE È ORDINATO SECONDO POTENZE CRESCENTI / DECRESCENTI di una certa lettera se letto da SX a DX gli esponenti crescono / decrescono

Es. $a^3+a^2x+ay+b^3$

ordinato secondo potenze decrescenti di a

Def. POLINOMIO COMPLETO rispetto una lettera se compaiono tutte le potenze di quella lettera, dal grado massimo a quelle di grado nullo

Es. $2y^3 - y^2 + y + 1$
è completo rispetto y

Es. $y^3 - y$
NON È COMPLETO rispetto y

Es $a^3 + a^2 b + a + c$
COMPLETO RISPETTO a
NON COMPLETO RISPETTO b

Def: 2 polinomi in FORMA NORMALE si dicono UGUALI se i TERMINI del PRIMO sono RISPETTIVAMENTE UGUALI al SECONDO (a meno dell'ORDINE di SCRITTURA)

Def. 2 POLINOMI IN FORMA NORMALE SI DICONO OPPOSTI SE I TERMINI del PRIMO SONO OPPOSTI AI TERMINI del SECONDO (a meno dell'ORDINE di SCRITTURA)

Es. $3ab - 4xy = -4xy + 3ab$

$3ab - 5a$ OPPOSTO A

$5a - 3ab$

Notazione

Def: $A(x)$ generico polinomio nella VARIABILE x
"A di x"

Def: $a^2 + ab + b^2$ è polinomio e si indica
$P(a, b)$

OSS: UN POLINOMIO È ESPRESSIONE ALGEBRICA, DIVENTA ESPRESSIONE NUMERICA SE SOSTITUISCO DEI NUMERI ALLE VARIABILI.

Es. $P(x) = x^2 + 2x + 1$

$P(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$

Def x_0 SI DICE ZERO del POLINOMIO se
$P(x_0) = 0$

Es. $P(x) = x^3 - 1$

$P(1) = 0$ 1 è lo ZERO di P
o RADICE

Operazioni tra polinomi

Come sappiamo SOMMA / SOTTRAZIONE si esprimono con i SEGNI DI OPERAZIONE $+, -$
Una volta scritta un'operazione, essa può essere semplificata togliendo le parentesi e riducendo gli eventuali termini simili

Es. $P(x) = 2x + y - c$

$P_1(x) = -x + y - c$

$\boxed{P(x) + P_1(x)} =$

$(2x + y - c) + (-x + y - c) =$

$= x + 2y - 2c$

$\boxed{P(x) - P_1(x)} =$

$(2x + y - c) - (-x + y - c) =$

$= 2x + \cancel{y} - c + x - \cancel{y} + c$

$= 3x$

OSS: (i) $P(x) - P_1(x)$ = SOMMA DEL PRIMO CON L'OPPOSTO DEL SECONDO

PER CUI SOMMA e SOTTRAZIONE SONO DEFINITI DA UNA UNICA OPERAZIONE detta ADDIZIONE ALGEBRICA

(ii) l'ADDIZIONE ALGEBRICA e' UN OPERAZIONE INTERNA ALL'INSIEME DEI POLINOMI

(iii) $P(x) + (-P(x)) = 0$

SOMMA DI OPPOSTI

POLINOMIO NULLO

(iv) $P(x) - P(x) = 0$

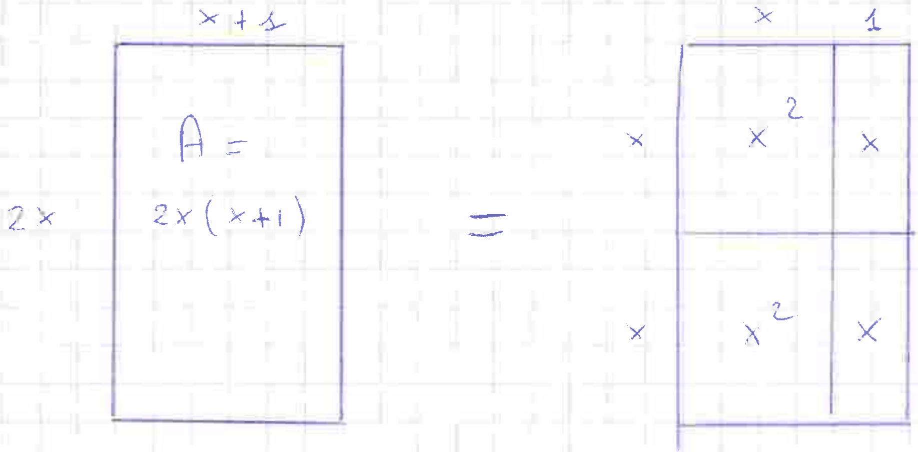
DIFFERENZA DI DUE POLINOMI UGUALI

Def.: (Monomio) × (Polinomio) moltiplico il monomio per tutti i termini del polinomio e poi sommare i prodotti ottenuti

Es. $2x(x+1) =$ prop. distributiva

$= 2x \cdot x + 2x \cdot 1 = 2x^2 + 2x$

Collegamento a concetti geometrici quanto visto



$A = \sum$ (aree dei triangolini)

Che condizione devo porre alla variabile x?

$\Rightarrow x > 0$

Def.: (Polinomio) × (Polinomio) moltiplico ciascun termine del 1° per tutti i termini del 2° e sommare i prodotti ottenuti

Es. $\underbrace{(x+y)}_{\text{Binomio}}\underbrace{(a+b)}_{\text{Binomio}} = ax + by + ay + bc$

Es. $(x^2 + 2x + 1)(x + 1)$

$= x^2 \cdot x + x^2 \cdot 1 + 2x \cdot x + 2x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$

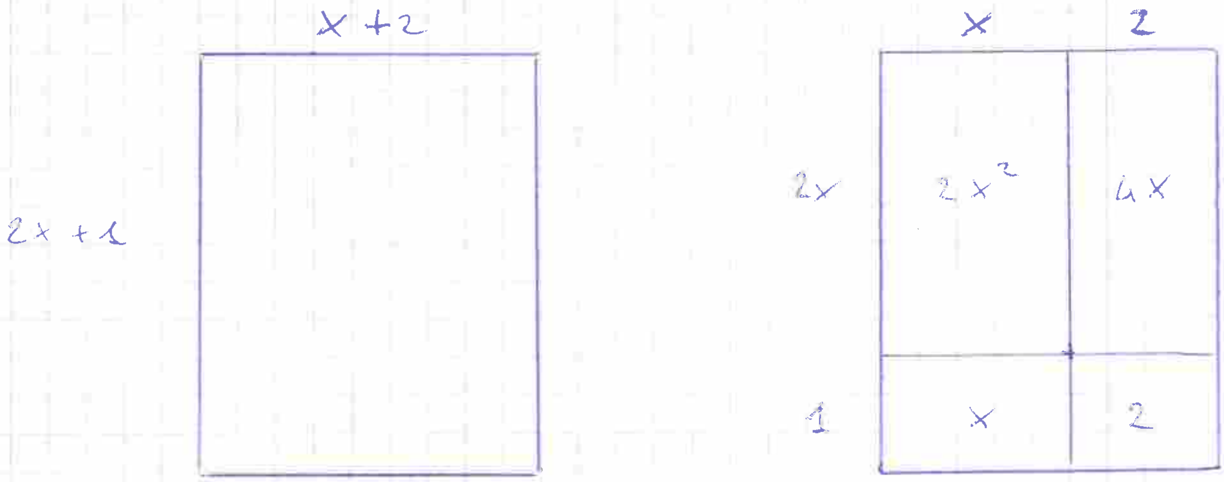
$= x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 =$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

OSS: PRIMA DI RIDURRE POSSO CONTROLLARE IL NUMERO DEI TERMINI OTTENUTI. Come?

(3 termini) × (2 termini) = 6 termini

COLLEGHIAMO LA GEOMETRIA COME PRIMA



$(2x+1)(x+2) = 2x^2 + 4x + x + 2$

PROPRIETÀ DEI POLINOMI CON COEFFICIENTI IN $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$

i) ADDIZIONE: COMMUTATIVA, ASSOCIATIVA, EL. NEUTRO (0)

ii) MOLTIPLICAZIONE: COMMUTATIVA, ASSOCIATIVA, EL. NEUTRO (1)
DISTRIBUTIVA RISPETTO ADDIZIONE

RICORDA LE PROPRIETÀ VISTE PER GLI INSIEMI NUMERICI

Def. Dati i monomi A, B, il prodotto della somma di A e B per la loro differenza è uguale alla differenza tra il quadrato di A e il quadrato di B.
Questa è detta regola del <u>prodotto notevole</u>

$$\boxed{(A+B)(A-B)} = A^2 - AB + AB - B^2$$
$$= A^2 - B^2$$

→ Vedi pag 235 per esempio geometrico

Oss. Vale anche se A e B sono polinomi

Es. $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$

Def. A, B monomi : il quadrato del binomio è:

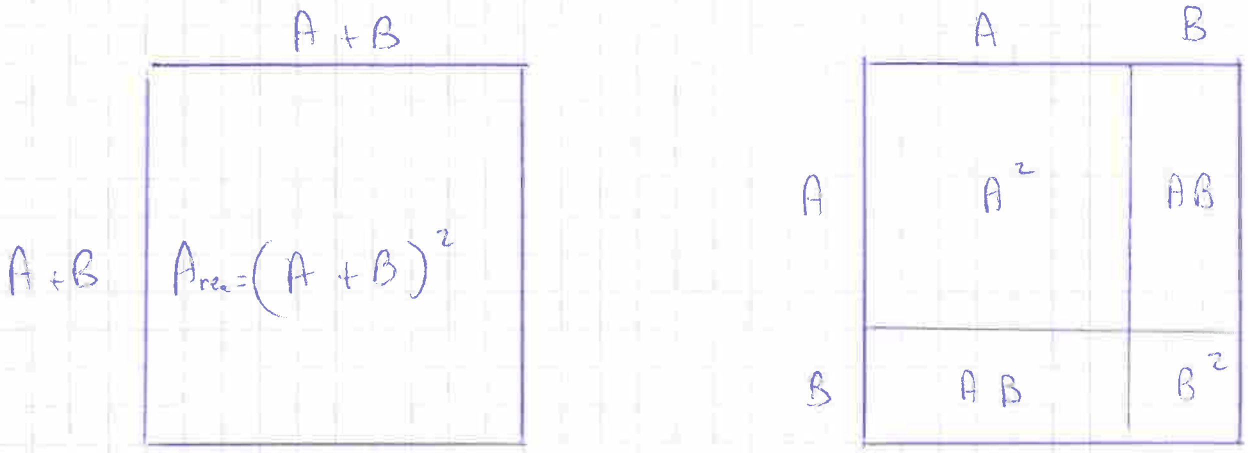
$$\boxed{(A+B)^2} = A^2 + B^2 + \underbrace{2AB}_{\text{doppio prodotto}}$$

Oss. Vale anche se A e B sono polinomi

Es. $(x+y+1)(x+y-1) =$

$$= [(x+y)+1][(x+y)-1] =$$
$$= (x+y)^2 - 1$$
$$= x^2 + y^2 + 2xy - 1$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Def.: QUADRATO DI UN TRINOMIO

$$\boxed{(A+B+C)^2} = A^2 + B^2 + C^2 + \underbrace{2AB + 2AC + 2BC}_{\text{DOPPI PRODOTTI}}$$

OSS: i) VALE ANCHE SE A, B, C SONO POLINOMI

ii) SI PUÒ GENERALIZZARE A PIÙ DI 3 MONOMI/POLINOMI

Es. $(2a^2 - ab + 3b)^2 =$

$= \ldots$

Def.: CUBO DI UN BINOMIO

$$\boxed{(A+B)^3} = (A+B)^2 (A+B) = A^3 + B^3 + \underbrace{3A^2B + 3AB^2}_{\text{TRIPLO PRODOTTO}}$$

OSS. i) VALE ANCHE SE A, B SONO POLINOMI

ii) A PAG. 255 LEGGERE IL COLLEGAMENTO CON L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

RIASSUMENDO I PRODOTTI NOTEVOLI SONO

1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

2) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

3) $(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

4) $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$

Def: POTENZA DI UN BINOMIO n-ESIMA:

$\boxed{(A+B)^n}$ dove è UN POLINOMIO OMOGENEO DI GRADO n, ORDINATO SECONDO POTENZE DECRESCENTI di A (a partire da n) e CRESCENTI di B (a partire da 0), i cui coefficienti SONO QUELLI DELLA n-ESIMA RIGA DEL TRIANGOLO DI TARTAGLIA.

$(A+B)$

$(A+B)^1 = 1A + 1B \longleftrightarrow$

$(A+B)^2 = 1A^2 + 2AB + 1B^2$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

⋮

1 — RIGA 0

1 1 — RIGA 1

1 2 1 — RIGA 2

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

OSS: IL POLINOMIO DEVE ESSERE ORDINATO. In questo CASO I SUOI COEFFICIENTI COINCIDONO CON QUELLI DEL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

Esempio $(a + b)^5$

→ LA RIGA 5 DEL TRIANGOLO È!

1, 5, 10, 10, 5, 1

$\_\_ a^5 b^0 + \_\_ a^4 b^1 + \_\_ + \_ a^3 b^2 + \_\_ + \_ a^2 b^3 + \_\_$

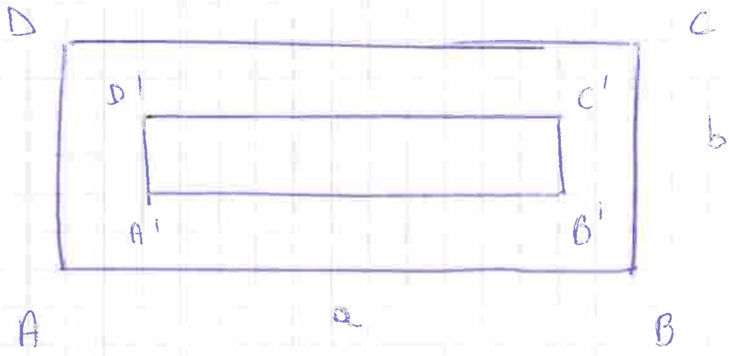
$\_\_ a^1 b^4 + \_\_ a^0 b^5 =$

$= 1 a^5 b^0 + 5 a^4 b^1 + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + a^0 b^5$

Esercizi a pag 264

I polinomi nei problemi (pag 242)

I polinomi permettono di esprimere in linea generale le misure di perimetri, aree ecc.
Questo è di aiuto nella risoluzione di problemi



I lati di A'B'C'D' sono lunghi 1 cm in meno dei corrispondenti lati del rettangolo ABCD

1) Calcoliamo l'area compresa tra i 2 rettangoli

$$\underbrace{\overline{A'B'}}_{\text{misura di un lato}} = \overline{AB} - 1 \qquad \overline{B'C'} = \overline{BC} - 1$$

$$\overline{AB} = a \qquad \overline{BC} = b$$

$$\overline{A'B'} = a - 1 \qquad \overline{B'C'} = b - 1$$

Area regione verde $= A_{ABCD} - A_{A'B'C'D'}$

$= ab - (a-1)(b-1) =$

$= a + b - 1$

OSS. Per trovare l'area di cosa ho bisogno
di a? di b? di $a+b$?

Se conosciamo solo il perimetro abbiamo

$$2(a+b) = 14 \text{ cm}$$

da cui

$$a+b = 7 \text{ cm}$$

$\Rightarrow$ AREA REGIONE COLORATA $= (a+b)-1$

$= (7)-1 \text{ cm}^2$

PROBLEMI NUMERICI

$n \in \mathbb{N}$

$2n+1$ è NUMERO DISPARI

$2n+3$ è IL NUMERO DISPARI CHE SEGUE $2n+1$ ~~ovvero~~ ~~$2n+1$~~

$2n$ è NUMERO PARI

L'AFFERMAZIONE: "LA DIFFERENZA DEI QUADRATI DI 2 NUMERI DISPARI CONSECUTIVI È SEMPRE UN MULTIPLO DI 8?

	N° DISPARI	N° DISPARI SUCCESSIVO	DIFFERENZA DEI QUADRATI
$n=1$	3	5	$5^2-3^2 = 25-9 = 16 = 2\cdot 8$
$n=2$	5	7	$7^2-5^2 = 49-25 = 24 = 3\cdot 8$

È VERA PER I NUMERI UTILIZZATI, MA È SEMPRE VERO?

$2n+1$, $2n+3$

DISPARI SUCCESSIVO

$$(2n+3)^2 - (2n+1)^2 = \ldots$$

$$= 8(n+1)$$

IL RISULTATO DI QUESTA DIFFERENZA È SEMPRE DIVISIBILE PER 8 , $\forall n$ SCELTO