SCOMPOSIZIONE DI POLINOMI

SCOMPORRE UN POLINOMIO È SIMILE ALLA SCOMPOSIZIONE IN FATTORI DI UN NUMERO NATURALE

$$\underbrace{12 = 6 \cdot 2}_{\text{FATTORI}} \qquad x^2 - 1 = \underbrace{(x+1)(x-1)}_{\text{FATTORI}}$$

FATTORIZZARE UN POLINOMIO significa SCOMPORRE

Def: POLINOMIO RIDUCIBILE SE È SCOMPONIBILE IN FATTORI, ALTRIMENTI È DETTO IRRIDUCIBILE

TECNICHE DI SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO

1) RACCOGLIMENTO TOTALE
2) RACCOGLIMENTO PARZIALE
3) SCOMPOSIZIONE MEDIANTE PRODOTTI NOTEVOLI
4) SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO
5) " MEDIANTE RUFFINI

(1) RACCOGLIMENTO TOTALE

Consiste nell'applicare la proprietà distributiva al contrario.

Moltiplicazione	Scomposizione
$2x(x+2) =$	$2x^2+4x =$
$2x \cdot x + 2x(+2) =$	$2x(x+2)$
$= 2x^2+4x$	

Si dice "ho raccolto il fattore $2x$"

Esempio: Proviamo a raccogliere un monomio

$$18x^2y + 12x =$$

$$= 6x \cdot 3xy + 6x \cdot 2 = 6x(3xy+2)$$

Che cosa è $6x$ per questi monomi?

$$MCD(18x^2y, 12x) = 6x$$

Il passaggio intermedio lo faremo mentalmente

Esempio: raccogliamo un fattore negativo

$$-5x^3+10x^2-25x =$$

$$= -5x(x^2-2x+5)$$

Evidenzio il passaggio intermedio

$$= -5x \cdot x^2 \; -5x(-2x) \; -5x(5)$$

(2) RACCOGLIMENTO PARZIALE

È UN RACCOGLIMENTO DI FATTORI CHE COINVOLGONO ALCUNI TERMINI DEL POLINOMIO

Esempio $ax + by + az =$

$= a(x + z) + by$

Esempio $ax + ay + 2x + 2y =$

$= a\boxed{(x+y)} + 2\boxed{(x+y)}$

C'È UN ALTRO FATTORE COMUNE!

$= (x+y)(a+2)$

Esempio SCOMPONIAMO $x^2 - xy + 2x - 2y$

I primi due termini hanno in comune "x"

I secondi " " " " "2"

$x(x-y) + 2(x-y) =$

FACCIAMO ORA UN RACCOGLIMENTO TOTALE

$= (x-y)(x+2)$

Esercizi a pag 318

5) SCOMPOSIZIONE MEDIANTE PRODOTTI NOTEVOLI

3a) DIFFERENZA DI DUE QUADRATI

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

BASTA INDIVIDUARE LA DIFFERENZA TRA 2 QUADRATI E APPLICARE LA REGOLA DA SX VERSO DX.

Esempio $4a^2b^4 - 1 =$

$$= \underbrace{(2ab^2)}_{A}^2 - \underbrace{(1)}_{B}^2 = (2ab^2-1)(2ab^2+1)$$

Esempio $x^2 - 4 =$

$$= (x)^2 - (2)^2 = (x+2)(x-2)$$

Esempio $x^2 - (y+z)^2$

$$= (x)^2 - (y+z)^2 =$$

$$= [(x + (y+z))(x - (y+z))]$$

$$= (x+y+z)(x-y-z)$$

4a) QUADRATO DI UN BINOMIO

$$(A^2 + 2AB + B^2) = (A+B)^2$$

ES. PROVIAMO AD INDIVIDUARE UN QUADRATO

$$4x^2 + 4x + 1 =$$

$$= (2x)^2 + (1)^2 + 2(2x)\cdot 1$$

$$= A^2 + B^2 + 2A\cdot B$$

$$= (2x + 1)^2$$

ES: $x^2 - 2x - 1$ POSSIAMO SCOMPORLO?

NON È POSSIBILE! IL TRINOMIO NON È UN QUADRATO DI UN BINOMIO A CAUSA DEL "-1".

INVECE $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

5a) CUBO DI UN TRINOMIO

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^2 = (A+B)^3$$

ES: SCOMPONIAMO $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

$$= (x)^3 + 3(x)^2 2y + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3$$

$$= (x + 2y)^3$$

PROVATE A VERIFICARLO COL PROCEDIMENTO INVERSO

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$$

6a) QUADRATO DI UN TRINOMIO

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC =$$
$$= (A + B + C)^2$$

Esempio $4x^2 + 4xy + 12x + y^2 + 6y + 9 =$

$$= (\underset{A}{2x})^2 + (\underset{B}{3})^2 + (\underset{C}{y})^2 + 2(2x)(3) + 2(3)(y) +$$

$$+ (2x)(y)$$

Attenzione nel caso di segni negativi

Esempio $(A - B - C)^2 = (A - B - C)(A - B - C)$

$$= A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - AB + BC + BC - AC$$

$$= A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC + 2BC$$

$$4x^2 - 4xy - 12x + y^2 + 6y + 3 =$$
$$= (2x - y - 3)^2$$

7a) SOMMA / DIFFERENZA DI CUBI

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$
$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

PROVA A VERIFICARLO

Es. $x^3 - 27 =$

$$= (x)^3 - (3)^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

$$\underset{A}{(x)} \quad \underset{B}{(3)}$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B)$$

Esercizi a pg 324

4) SCOMPOSIZIONE DI TRINOMI DI 2° GRADO

4a) $ax^2 + bx + c$

4b) $x^2 + bx + c$

CONSIDERIAMO DUE TIPI DI TRINOMI. CHE DIFFERENZA C'È?

4b) MOLTIPLICO 2 BINOMI $(x+p)$ e $(x+q)$

$$(x+p)(x+q) = x^2 + qx + px + q^2 =$$

$$= x^2 + \underbrace{(p+q)}_{\text{coefficiente termine 1° grado}} x + \underbrace{pq}_{\text{TERMINE NOTO}}$$

SIAMO IN GRADO DI SCOMPORRE UN TRINOMIO DEL TIPO $x^2 + bx + c$ SE TROVO p e q t.c.

$$x^2 + bx + c = x^2 + (p+q)x + pq$$

$$= (x+p)(x-q)$$

PER FATTORIZZARE $x^2 + bx + c$ CERCHIAMO 2 NUMERI p, q TALI CHE: LA SOMMA È b e il prodotto è q.

Es. $x^2 + 8x + 12$

DOBBIAMO TROVARE p e q t.c.

$$\begin{cases} p + q = 8 \\ p \cdot q = 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $p = 2$, $q = 6$

$= x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$

PROVATE A VERIFICARLO

Es. $x^2 - x + 12 =$

$$\begin{cases} p + q = -1 \\ pq = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} p = -4 \\ q = 3 \end{cases}$$

$= (x-4)(x+3)$

4a) TRINOMIO DEL TIPO $ax^2 + bx + c$

$a \neq 1$

$$ax^2 + bx + c$$

1° PASSO: CALCOLO $a \cdot c$

2° PASSO: TROVO p e q t.c. $\begin{cases} p+q = b \\ p \cdot q = ac \end{cases}$

3° PASSO: SCRIVO IL TRINOMIO NELLA FORMA

$$ax^2 + px + qx + c$$

4° PASSO: FATTORIZZO I TERMINI

Esempio: $2x^2 - 7x + 5$

1° PASSO $a \cdot c = 10$

2° PASSO: $\begin{cases} p+q = -7 \\ p \cdot c = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2 \\ q = -5 \end{cases}$

3° PASSO $2x^2 \underbrace{-2x \; -5x}_{-7x} + 5 =$

$$2x^2 - 2x - 5x + 5$$

Ci sono fattori che posso raccogliere

$$2x(x-1) - 5(x-1) =$$

$$= (x-1)(2x-5)$$

5) Scomposizione mediante il teorema e la regola di Ruffini

Ricordiamo il teorema di Ruffini .....

Il teorema ci viene in aiuto solo se conosciamo uno zero del polinomio ($P(c) = 0$)

Es. $P(x) = x^3 - 2x + 1$

Verifichiamo che $P(1) = 0$ allora
$x = 1$ è uno zero di $P(x)$

Per il teorema: $P(x) = Q(x)\,(x-1)$

Allora basta calcolare con il procedimento di Ruffini $Q(x)$.
Verifichiamo che $Q(x) = x^2 + x - 1$

Allora $P(x) = (x^2 + x - 1)(x - 1)$

In altri termini per scomporre un polinomio bisogna trovare un suo zero e il procedimento non è sempre facile.

Riassumendo i passi per scomporre $P(x)$ con la regola di Ruffini sono:

1) Cerco uno zero di $P(x)$ es. $x = c$
2) $P(x) = Q(x)\,(x - c)$ per il teorema di Ruffini
3) Calcolo di $Q(x)$ col il procedimento di Ruffini

ESISTE UN CRITERIO CHE PUÓ FACILITARE LA RICERCA DEGLI ZERI DI UN POLINOMIO QUALSIASI:

> GLI EVENTUALI ZERI RAZIONALI DI $P(x)$ A coefficienti INTERI SONO NUMERI DEL TIPO $\frac{p}{q}$
> DOVE p É UN NUMERO INTERO DIVISORE DEL TERMINE noto di $P(x)$ e q É INTERO DIVISORE DEL coefficiente DI GRADO MASSIMO di $P(x)$

Esempio i) Se posso scrivere il polinomio $P(x)$

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

il coefficiente di x^2 é 1 $\quad (q=1)$

il termine noto é $-abc$ ed é DIVISIBILE per a, b e c CIOÉ É DIVISIBILE per TUTTI I SUOI ZERI

Esempio ii) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

termine noto é 6, I SUOI ZERI SONO ± 1, ± 2, ± 3

PER SOSTITUZIONE VERIFICHIAMO CHE GLI ZERI SONO SOLO $x = -1, 2, 3$

ALLORA LA SCOMPOSIZIONE é

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$$

ES. m) TROVIAMO GLI ZERI DI

$$P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$$

$P(x)$ HA coefficienti INTERI ALLORA UTILIZZIAMO IL CRITERIO PRECEDENTE

termine noto $= -1$

Coeff. DI "x^3" $= 2$

$p = \pm 1$ SONO DIVISORI DI -1

$q = \pm 1, \pm 2$ " " DI 2

ALLORA GLI EVENTUALI ZERI SONO $\frac{p}{q}$

$\frac{p}{q} = \pm 1 , \pm \frac{1}{2}$

$P(-1) = -3$ NON É ZERO

$P(1) = 3$ " "

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ " "

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ É LO ZERO RAZIONALE

→ PUÓ CAPITARE DI NON POTER TROVARE GLI ZERI E QUINDI DI NON POTER EFFETTUARE LA SCOMPOSIZIONE

→ É SEMPRE IMPORTANTE VERIFICARE LA SCOMPOSIZIONE FACENDO LA MOLTIPLICAZIONE

MCD e mcm TRA POLINOMI

RICORDIAMO LA DEFINIZIONE di MCD e mcm e in modo analogo ABBIAMO VISTO LE DEFINIZIONI PER I MONOMI.
PER I POLINOMI.

Def: MCD TRA 2 o più POLINOMI è ogni POLINOMIO DI GRADO MASSIMO CHE SIA DIVISORE DEI POLINOMI DATI.

Def mcm TRA 2 o più polinomi è ogni POLINOMIO DI GRADO MINIMO CHE SIA MULTIPLO DEI POLINOMI DATI.

Come si DETERMINANO?

MCD SCOMPOSTI I POLINOMI IN FATTORI IRRIDUCIBILI IL MCD È IL PRODOTTO DEI FATTORI IRRIDUCIBILI COMUNI, PRESI UNA SOLA VOLTA CON ESPONENTE MINIMO

m.c.m SCOMPOSTI I POLINOMI IN FATTORI IRRIDUCIBILI IL m.c.m È IL PRODOTTO DEI FATTORI IRRIDUCIBILI COMUNI e non comuni, PRESI UNA SOLA VOLTA CON ESPONENTE MASSIMO

Es. $x + x$, $x - 2x + 1$, $x + 2x + 1$

(1) SCOMPONGO IN FATTORI IRRIDUCIBILI

$x^3(x+1)$

$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 =$

$= [(x+1)(x-1)]^2 = (x+1)^2 (x-1)^2$

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

(2) TROVIAMO IL MCD:

IL FATTORE COMUNE E' $(x+1)$ CON ESPONENTE MINIMO

$MCD = (x+1)^{1} = x+1$

(3) TROVIAMO IL mcm:

FATTORI COMUNI: $(x+1)$

FATTORI NON COMUNI x^3, $(x-1)^2$

$mcm = (x+1)^{2} (x-1)^{2} x^{3}$

ABBIAMO CONSIDERATO GLI ESPONENTI MASSIMI

OSS: 1) MCD, mcm NON SONO UNICI A MENO DI FATTORI NUMERICI

(ES: $MCD = 3(x+1)$)