

**POLINOMI**  
**CLASSE II A**  
**Prof. Erasmo Modica**  
[erasmo@galois.it](mailto:erasmo@galois.it)  
[www.galois.it](http://www.galois.it)

---

**DEFINIZIONI**

---

**Definizione:** Dicesi *polinomio* un'espressione algebrica formata dalla somma algebrica di due o più monomi, detti *termini* del polinomio.

*Esempi:*

Le espressioni

$$2\sqrt{3}ab^2 - \frac{5}{7}b^2c + e^{-1}ab \quad \text{e} \quad -\sqrt{\pi}a^2 + \frac{3}{e}b^2$$

sono tutti polinomi (si ricordi che le lettere  $e$  e  $\pi$  indicano dei numeri irrazionali e quindi sono costanti e non variabili).

**Definizione:** Dicesi *grado di un polinomio* il massimo tra i gradi dei singoli monomi che lo compongono.

*Esempio:*

Il polinomio  $\frac{1}{2}x^2z^3 + 5xz^2 + \frac{3}{4}xt$  ha grado 5.

**Definizione:** Un polinomio si dice *omogeneo* se tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado.

*Esempio:*

Il polinomio  $\frac{1}{2}x^2z^3 + 5x^3z^2 + \frac{3}{4}xt^4$  è omogeneo di grado 5.

**Principio d'identità dei polinomi:** *Dati due polinomi  $p(x)$  e  $q(x)$  essi sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei termini simili.*

Le operazioni possibili nell'insieme dei polinomi sono:

- l'addizione,
- la sottrazione,
- la moltiplicazione,
- l'elevazione a potenza con esponente naturale.

## OPERAZIONI CON I POLINOMI

### Somma di polinomi

**Definizione:** La *somma* di due polinomi è il polinomio che si ottiene scrivendo, dopo i termini del primo polinomio, i termini del secondo, ciascuno con il proprio segno.

**Esempio:** Sommare i polinomi  $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3$  e  $q(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 4$ .

Il polinomio somma è dato da:

$$p(x) + q(x) = \frac{3}{2}x^3 + 5x^2 - 7$$

La somma tra polinomi gode delle proprietà:

- commutativa;
- associativa;
- 0 è l'elemento neutro rispetto alla somma;
- ogni polinomio ammette opposto.

### Prodotto di un monomio per un polinomio

**Definizione:** Il *prodotto di un monomio per un polinomio* è il polinomio che si ottiene moltiplicando tutti i termini del polinomio per il monomio.

**Esempio:**

Il prodotto del monomio  $\frac{5}{2}x^2z$  per il polinomio  $-\frac{2}{3}x^2z^2y - \frac{5}{3}x^4z^3y$  è dato da:

$$\frac{5}{2}x^2z \cdot \left( -\frac{2}{3}x^2z^2y - \frac{5}{3}x^4z^3y \right) = -\frac{5}{3}x^4z^3y - \frac{25}{6}x^6z^4y$$

### Prodotto di due polinomi

**Definizione:** Il *prodotto di due polinomi* è il polinomio che si ottiene moltiplicando tutti i termini del primo polinomio per ogni termine del secondo.

**Esempio:**

Il prodotto del polinomio  $\frac{5}{2}x^2z + \frac{1}{2}x$  per il polinomio  $-\frac{2}{3}x^2z^2y - \frac{5}{3}x^4z^3y$  è dato da:

$$\left( \frac{5}{2}x^2z + \frac{1}{2}x \right) \cdot \left( -\frac{2}{3}x^2z^2y - \frac{5}{3}x^4z^3y \right) = -\frac{5}{3}x^4z^3y - \frac{25}{6}x^6z^4y - \frac{1}{3}x^3z^2y - \frac{5}{6}x^5z^3y$$

## Prodotti notevoli

*Sono moltiplicazioni di polinomi che danno luogo a risultati ottenibili in modo semplice e rapido e facilmente ricordabili.*

### 1° QUADRATO DI UN BINOMIO

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

*Il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo monomio, il quadrato del secondo e il doppio prodotto del primo per il secondo.*

*Esempio:*  $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

### 2° DIFFERENZA DI DUE QUADRATI

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

*Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale alla differenza tra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo monomio.*

*Esempi:*

1.  $(3a^2 + 5ab) \cdot (3a^2 - 5ab) = 9a^4 - 25a^2b^2$
2.  $(a + b + 2c) \cdot (a + b - 2c) = [(a + b) + 2c] \cdot [(a + b) - 2c] = (a + b)^2 - (2c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4c^2$

### 3° CUBO DI UN BINOMIO

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) \\ = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

*Il cubo di un binomio è uguale alla somma tra il cubo del primo monomio che costituisce il binomio, il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo monomio per il primo e il cubo del secondo monomio.*

*Esempio:*  $(2a + b^2)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot b^2 + 3 \cdot (2a) \cdot (b^2)^2 + (b^2)^3 = 8a^3 + 12a^2b^2 + 6ab^4 + b^6$

#### 4° SOMMA E DIFFERENZA DI CUBI

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

*La somma di due cubi è uguale al prodotto della somma delle basi per il trinomio formato dal quadrato della prima base, dall'opposto del prodotto delle basi e dal quadrato della seconda base.*

*La differenza di due cubi è uguale al prodotto della differenza delle basi per il trinomio formato dal quadrato della prima base, dal prodotto delle basi e dal quadrato della seconda base.*

**Esempi:**

1.  $8x^3 + 27y^3 = (2x + 3y) \cdot (4y^2 - 6xy + 9y^2)$

2.  $27x^6 - y^3 = (3x^2 - y) \cdot (9x^4 + 3x^2y + y^2)$

#### 5° TRIANGOLO DI TARTAGLIA O DI PASCAL

I coefficienti delle successive potenze del binomio  $a + b$  si possono trovare mediante il cosiddetto *triangolo di Tartaglia*:

				1						
					1		1			
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

La legge di formazione del triangolo è semplice: i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l'ultimo che sono uguali a uno) sono la somma di quelli soprastanti della riga precedente.

